Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра теории управления

Медведев Кирилл Сергеевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Оценка допустимых погрешностей в одной задаче стабилизации

Направление 010400

Прикладная математика, фундаментальная информатика

и основы программирования

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Харитонов В. Л.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение

Основной целью данной работы является робастный анализ систем с запаздыванием в управлении и состоянии. Подобные задачи возникают в ситуациях, когда неизвестно точное значение параметров системы. Известно, что при отклонении параметров замкнутой системы от расчетных значений новая система может утратить свойство устойчивости. Именно поэтому важно знать, в каких интервалах могут меняться параметры системы так, чтобы система сохраняла устойчивость. Оценка будет производиться на основе рассмотрения характеристических матриц возмущенной и невозмущенной систем.

Глава 1. Ранее полученные результаты

Рассмотрим систему с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t-h) + Bu(t-\tau). \tag{1}$$

Здесь матрицы $A \in R^{n\times n}$ и $B \in R^{n\times m}$, пара (A, B) — полностью управляема, запаздывание $h > 0$, $\tau \in [h, 2h]$.

По формуле Коши [1] решение данной системы можно представить как

$$\begin{aligned} x(t+\tau-h) \ &= K(\tau-h)x(t) + \int\limits_{-h}^{0} K(\tau-2h-\theta)Ax(t+\theta)d\theta + \\ &+ \int\limits_{t}^{t+\tau-h} K(t+\tau-h-\xi)Bu(\xi-\tau)d\xi, \quad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

где $K(t)$ — фундаментальная матрица системы. Известно, что она должна удовлетворять уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t-h), \quad t \geqslant 0,$$

и начальным условиям

$$K(t) = \begin{cases} 0_{n\times n}, & t < 0, \\ E_{n\times n}, & t = 0. \end{cases}$$

Так как $(\tau - h) \in [0, h]$, то фундаментальная матрица $K(\tau - h) = E_{n\times n}$. Кроме того, на интервале $t \in [0, h]$ справедливо

$$K(t-h) = 0_{n\times n},$$

$$\dot{K}(t) = 0_{n\times n},$$

откуда с учетом $K(0) = E_{n\times n}$ следует

$$K(t) = E_{n\times n}, \quad t \in [0, h].$$

Таким образом решение может быть записано в виде

$$x(t+\tau-h) = x(t) + \int\limits_{-h}^{\tau-2h} Ax(t+\theta)d\theta + \int\limits_{-\tau}^{-h} Bu(t+\xi)d\xi. \tag{2}$$

Управление для системы выберем следующим образом

$$u(t) = Fx(t+\tau-h). \tag{3}$$

Используя формулу (2), получим

$$u(t) = Fx(t) + F\int\limits_{-h}^{\tau-2h} Ax(t+\theta)d\theta + F\int\limits_{-\tau}^{-h} Bu(t+\xi)d\xi.$$

Характеристическая функция замкнутой системы (1), (3) имеет вид

$$f_0(s) = \det[sE_{n\times n} - e^{-sh}(A+BF)].$$

Лемма [1]: *Корни функции $f_0(s)$ имеют отрицательную вещественную часть тогда и только тогда, когда собственные числа матрицы $A+BF$ лежат в области*

$$\Gamma = \Big\{s = \alpha + i\beta \,|\, \alpha = -\omega\sin\omega h,\, |\beta| < |\omega\cos\omega h|,\, \omega \in \Big(-\frac{\pi}{2h}, \frac{\pi}{2h}\Big)\Big\}$$

комплексной плоскости.

Далле будем полагать, что выбор матрицы F обеспечивает выполнение данной леммы.

Замена интегралов в формуле (3) конечными суммами может приводить к неустойчивости замкнутой системы [2]. Для того чтобы не допустить этого в работе [4] было предложено использовать дополнительный фильтр. Выберем матрицу Гурвица [5] $G \in R^{m\times m}$, и вычислим разность

$$\frac{du(t)}{dt} - Gu(t) = F\dot{x}(t+\tau-h) - GFx(t+\tau-h) =$$

$$= F(Ax(t+\tau-2h) + Bu(t-h)) - GFx(t) -$$

$$- GF\int\limits_{-h}^{\tau-2h} Ax(t+\theta)d\theta - GF\int\limits_{-\tau}^{-h} Bu(t+\xi)d\xi.$$

В результате получим замкнутую систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t-h) + Bu(t-\tau), \\ \dfrac{du(t)}{dt} = Gu(t) + FBu(t-h) - GF(x(t) + A\displaystyle\int\limits_{-h}^{\tau-2h} x(t+\theta)d\theta + \\ \qquad + B\displaystyle\int\limits_{-\tau}^{-h} u(t+\xi)d\xi) + FAx(t+\tau-2h). \end{cases} \tag{4}$$

1.1. Дополнительные утверждения

Утверждение 1: *Для того чтобы $E+D$ была невырождена достаточно, чтобы выполнялось условие $||D|| < 1$*

Докажем от противного: пусть выполнено условие $||D|| < 1$, но при этом у матрицы $E + D$ есть нулевое собственное число. Пусть $x \neq 0$ — собственый вектор, соответствующий нулевому собственному числу. Тогда справедливы следующие выражения

$$(E + D)x = 0x,$$

$$Dx = -x.$$

Из этих равенств с учетом $\max\limits_{||x||=1} ||Dx|| = ||D||$ получим

$$||x|| = ||Dx|| \leqslant ||D|| < 1,$$

что противоречит условию выбора x. Доказано

Глава 2. Задача робастного анализа

Рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t-h_1) + Bu(t-\tau_1), \\ \dfrac{du(t)}{dt} = Gu(t) + FBu(t-h) - GF(x(t) + A \displaystyle\int_{-h}^{\tau-2h} x(t+\theta)d\theta + \\ \quad +B \displaystyle\int_{-\tau}^{-h} u(t+\xi)d\xi) + FAx(t+\tau-2h). \end{cases} \tag{5}$$

где $h_1 = h + \delta_1$ и $\tau_1 = \tau + \delta_2$. Здесь $\delta_1 \in R$ и $\delta_2 \in R$ — значения возмущений, причем

$$|\delta_1| < \rho_1, \quad |\delta_2| < \rho_2.$$

Задача робастного анализа заключается в поиске величин ρ_1 и ρ_2 таких, что возмущенная система (5) сохраняет устойчивость.

2.1. Возмущение запаздывания в состоянии

В данном разделе рассматривается случай, когда возмущение содержится только в запаздывании состояния, то есть $|\delta_2| = 0$. Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t-h_1) + Bu(t-\tau), \\ \dfrac{du(t)}{dt} = Gu(t) + FBu(t-h) - GF(x(t) + A \displaystyle\int_{-h}^{\tau-2h} x(t+\theta)d\theta + \\ \quad +B \displaystyle\int_{-\tau}^{-h} u(t+\xi)d\xi) + FAx(t+\tau-2h). \end{cases} \tag{6}$$

Характеристическая матрица системы (6) имеет вид

$$R(s) = R_0(s) + \Delta(s) =$$

$$= \begin{pmatrix} sE_{n\times n} - Ae^{-sh} & -Be^{-s\tau} \\ GF + \frac{GFA(e^{s(\tau-2h)} - e^{-sh})}{s} - FAe^{s(\tau-2h)} & sE_{m\times m} - G + \Omega(s) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$+ \begin{pmatrix} A(e^{-sh} - e^{-sh_1}) & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{pmatrix},$$

где $\Omega(s) = -FBe^{-sh} + \frac{GFB(e^{-sh} - e^{-s\tau})}{s}$, $R_0(s)$ — характеристическая матрица системы (4) без возмущений, $\Delta(s)$ — матрица, возникшая в силу добавления возмущения.

Характеристической функцией возмущенной системы (6) является

$$q(s) = det(R(s)).$$

Для получения оценки ρ_1 будем рассматривать ситуацию, когда нарушается устойчивость системы (6), то есть у характеристической функции появляется корень на мнимой оси

$$q(s) = det(R(i\omega)) = 0, \quad \omega \in R$$

Это утверждение эквивалентно тому, что матрица $R(i\omega)$ будет вырожденной. Воспользуемся тем фактом, что $R(s)$ удовлетворяет соотношению (7) и вынесем за скобки множитель $R_0(i\omega)$

$$R_0(i\omega)\Big(E_{(m+n)\times(m+n)} + R_0^{-1}(i\omega)\Delta(i\omega)\Big).$$

Известно, что $R_0(s)$ — характеристическая матрица невозмущенной системы (4), следовательно она не может иметь нулевого собственного числа на мнимой оси. Это означает что такое собственное число должна иметь матрица

$$E_{(m+n)\times(m+n)} + R_0^{-1}(i\omega)\Delta(i\omega)$$

Воспользовавшись вспомогательным утверждением 1, получим

$$||R_0^{-1}(i\omega)||\,||\Delta(i\omega)|| \geqslant 1.$$

Это означает, что, если $\forall\,\omega \in R$ выполнено

$$||R_0^{-1}(i\omega)||\,||\Delta(i\omega)|| < 1,$$

то ни одно из собственных чисел системы (6) не попадает на мнимую ось. Рассмотрим более подробно норму $||\Delta(i\omega)||$. Известно, что

$$\Delta(s) = \begin{pmatrix} Ae^{-sh} - Ae^{-sh_1} & 0_{n\times m} \\ & \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{pmatrix},$$

откуда непосредственно получаем, что

$$||\Delta(s)|| = ||A||\,|e^{-sh} - e^{-sh_1}|,$$

$$||\Delta(i\omega)|| = ||A||\,|e^{-i\omega h} - e^{-i\omega h_1}|.$$

Дальнейшую оценку величины $|e^{-i\omega h} - e^{-i\omega h_1}|$ можно провести двумя способами. Первый способ является более грубым, поскольку мы воспользуемся свойством $|e^{i\phi}| = 1$, а значит получим

$$||\Delta(i\omega)|| \leqslant 2||A||.$$

Основываясь на этой оценке можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1: *Если для системы* (5) *выполнены условия* $\delta_2 = 0$, *и* $\forall\, \omega \in R$

$$||R_0^{-1}(i\omega)|| < \frac{1}{2||A||},$$

то эта система сохраняет устойчивость при любых допустимых значениях h_1.

Второй способ оценки заключается в том, что

$$|e^{-i\omega h} - e^{-i\omega h_1}| = |e^{-i\omega \frac{h+h_1}{2}}(e^{-i\omega \frac{h-h_1}{2}} - e^{i\omega \frac{h-h_1}{2}})|.$$

Далее, учитывая, что $|e^{-i\omega \frac{h+h_1}{2}}| = 1$ и $|e^{-i\omega \frac{h-h_1}{2}} - e^{i\omega \frac{h-h_1}{2}}| = |2sin(\omega \frac{h-h_1}{2})|$, получим

$$||\Delta(i\omega)|| \leqslant ||A||\, |2sin(\omega \frac{h-h_1}{2})|$$

Перед тем, как сформулировать еще одну теорему, рассмотрим матрицу $R_0(i\omega)$. Представим ее в виде

$$R_0(i\omega) = i\omega\Big(E - O(i\omega)\Big),$$

где

$$O(i\omega) = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix},$$

$$O_{11} = \frac{e^{-i\omega h}}{i\omega}A$$

$$O_{12} = \frac{e^{-i\omega \tau}}{i\omega}B$$

$$O_{21} = -\frac{1}{i\omega}GF + \frac{e^{i\omega(\tau-2h)} - e^{-i\omega h}}{\omega^2}GFA - \frac{e^{i\omega(\tau-2h)}}{i\omega}FA$$

$$O_{22} = \frac{1}{i\omega}G + \frac{e^{-i\omega h}}{i\omega}FB + \frac{e^{-i\omega h} - e^{-i\omega\tau}}{\omega^2}GFB$$

Нетрудно заметить, что $\exists\, r$ такое что $\forall\, |\omega| > r \quad ||O(i\omega)|| < 1$.

Рссмотрим теперь норму $||R_0^{-1}(i\omega)||$. Для нее справедливо

$$||R_0^{-1}(i\omega)|| < \frac{1}{|\omega|}\,\frac{1}{||E - O(i\omega)||} = \frac{1}{|\omega|}\,\sum_{k=0}^{\infty}||O^k(i\omega)|| \leqslant \frac{1}{|\omega|}\,\sum_{k=0}^{\infty}||O(i\omega)||^k =$$

$$= \frac{1}{|\omega|}\,\frac{1}{1 - ||O(i\omega)||} \to 0, \quad \omega \to \infty.$$

Это означает, что $\forall\, M \in R \quad \exists\, \Omega$ такое что $\forall\, |\omega| > \Omega \quad ||R_0^{-1}(i\omega)|| \geqslant M$. Выбрав $M = \frac{1}{2||A||}$, теперь можно сформулировать вторую теорему.

Теорема 2: *Если для системы* (5) *выполнены условия* $\delta_2 = 0$, *и* $\exists\, \Omega \in R$ *такое что* $\forall\, |\omega| \geqslant \Omega$

$$||R_0^{-1}(i\omega)|| \leqslant \frac{1}{2||A||},$$

то для того, чтобы данная возмущенна система сохраняла устойчивость, необходимо, чтобы $\forall\, |\omega| < \Omega$ *выполнялось неравенство*

$$|sin\Big(\omega\frac{h - h_1}{2}\Big)| < \frac{1}{2||A||}.$$

2.2. Возмущение запаздывания в управлении

В данном разделе рассматривается случай, когда возмущение содержится только в запаздывании управления, то есть $|\delta_1| = 0$. Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t-h) + Bu(t-\tau_1), \\ \dfrac{du(t)}{dt} = Gu(t) + FBu(t-h) - GF(x(t) + A \displaystyle\int\limits_{-h}^{\tau-2h} x(t+\theta)d\theta + \\ \qquad +B \displaystyle\int\limits_{-\tau}^{-h} u(t+\xi)d\xi) + FAx(t+\tau-2h), \end{cases} \tag{8}$$

где $\tau_1 = \tau + \delta_2$, $\delta_2 \in R$ — значение возмущения, причем

$$|\delta_2| < \rho_2.$$

Задача робастного анализа в данном случае заключается в поиске величины ρ_2 такой, что возмущенная система (8) сохраняет устойчивость.

Характеристическая матрица данной системы имеет вид

$$R(s) = R_0(s) + \Delta(s) =$$

$$= \begin{pmatrix} sE_{n\times n} - Ae^{-sh} & -Be^{-s\tau} \\ GF + \frac{GFA(e^{s(\tau-2h)} - e^{-sh})}{s} - FAe^{s(\tau-2h)} & sE_{m\times m} - G + \Omega(s) \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & B(e^{-s\tau} - e^{-s\tau_1}) \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{pmatrix},$$

где $\Omega(s) = -FBe^{-sh} + \frac{GFB(e^{-sh}-e^{-s\tau})}{s}$, $R_0(s)$ — характеристическая матрица системы (3) без возмущений, $\Delta(s)$ — матрица, возникшая в силу добавления возмущения.

Характеристической функцией возмущенной системы (8) является

$$q(s) = det(R(s)).$$

Для получения оценки ρ_2 будем рассматривать ситуацию, когда нарушается устойчивость системы (8), то есть у характеристической функции появляется корень на мнимой оси

$$q(i\omega) = det(R(i\omega)) = 0, \quad \omega \in R$$

Это утверждение эквивалентно тому, что матрица $R(i\omega)$ будет вырожденной. Воспользуемся тем фактом, что $R(s)$ удовлетворяет соотношению (9) и вынесем за скобки множитель $R_0(i\omega)$

$$R_0(i\omega)\Big(E + R_0^{-1}(i\omega)\Delta(i\omega)\Big).$$

Известно, что $R_0(s)$ — характеристическая матрица невозмущенной системы (4), следовательно она не может иметь нулевого собственного числа на мнимой оси. Это означает что такое собственное число должна иметь матрица

$$E + R_0^{-1}(i\omega)\Delta(i\omega).$$

Воспользовавшись вспомогательным утверждением 1, получим

$$||R_0^{-1}(i\omega)||\,||\Delta(i\omega)|| \geqslant 1.$$

Это означает, что если $\forall\,\omega \in R$ выполнено

$$||R_0^{-1}(i\omega)||\,||\Delta(i\omega)|| < 1,$$

то ни одно из собственных чисел системы (8) не попадает на мнимую ось.

Рассмотрим более подробно норму $||\Delta(i\omega)||$. Известно, что

$$\Delta(s) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & B(e^{-s\tau} - e^{-s\tau_1}) \\ \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{pmatrix},$$

откуда непосредственно получаем, что

$$||\Delta(s)|| = ||B||\,|e^{-s\tau} - e^{-s\tau_1}|,$$

$$||\Delta(i\omega)|| = ||B||\,|e^{-i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau_1}|.$$

Дальнейшую оценку величины $|e^{-i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau_1}|$ можно провести двумя способами. Первый способ является более грубым, поскольку мы воспользуемся свойством $|e^{i\phi}| = 1$, а значит получим

$$||\Delta(i\omega)|| \leqslant 2||B||.$$

Основываясь на этой оценке можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3: *Если для системы* (5) *выполнены условия* $\delta_1 = 0$, *и* $\forall\,\omega \in R$

$$||R_0^{-1}(i\omega)|| < \frac{1}{2||B||},$$

то эта система сохраняет устойчивость при любых допустимых значениях τ_1.

Второй способ оценки заключается в том, что

$$|e^{-i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau_1}| = |e^{-i\omega\frac{\tau+\tau_1}{2}}(e^{-i\omega\frac{\tau-\tau_1}{2}} - e^{i\omega\frac{\tau-\tau_1}{2}})|.$$

Далее, учитывая, что $|e^{-i\omega\frac{\tau+\tau_1}{2}}| = 1$ и $|e^{-i\omega\frac{\tau-\tau_1}{2}} - e^{i\omega\frac{\tau-\tau_1}{2}}| = |2sin(\omega\frac{\tau-\tau_1}{2})|$, получим

$$||\Delta(i\omega)|| \leqslant ||B||\,|2sin(\omega\frac{\tau-\tau_1}{2})|.$$

Перед тем, как сформулировать еще одну теорему, рассмотрим матрицу $R_0(i\omega)$. Очевидно, что

$$R_0(i\omega) = i\omega\Big(E - O(i\omega)\Big),$$

где

$$O(i\omega) = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix},$$

$$O_{11} = \frac{e^{-i\omega h}}{i\omega}A$$

$$O_{12} = \frac{e^{-i\omega \tau}}{i\omega}B$$

$$O_{21} = -\frac{1}{i\omega}GF + \frac{e^{i\omega(\tau-2h)} - e^{-i\omega h}}{\omega^2}GFA - \frac{e^{i\omega(\tau-2h)}}{i\omega}FA$$

$$O_{22} = \frac{1}{i\omega}G + \frac{e^{-i\omega h}}{i\omega}FB + \frac{e^{-i\omega h} - e^{-i\omega\tau}}{\omega^2}GFB$$

Нетрудно заметить, что $\exists\, r$ такое что $\forall\, |\omega| > r \quad ||O(i\omega)|| < 1$.

Рссмотрим теперь норму $||R_0^{-1}(i\omega)||$. Для нее справедливо

$$||R_0^{-1}(i\omega)|| < \frac{1}{|\omega|}\,\frac{1}{||E - O(i\omega)||} = \frac{1}{|\omega|}\sum_{k=0}^{\infty}||O(i\omega)|| \leqslant \frac{1}{|\omega|}\sum_{k=0}^{\infty}||O(i\omega)||^k =$$

$$= \frac{1}{|\omega|}\,\frac{1}{1 - ||O(i\omega)||} \to 0 \quad \omega \to \infty.$$

Это означает, что $\forall\, M \in R \quad \exists\, \Omega$ такое что $\forall\, |\omega| > \Omega \quad ||R_0^{-1}(i\omega)|| \geqslant M$. Выбрав $M = \frac{1}{2||B||}$, теперь можно сформулировать вторую теорему.

Теорема 4: *Если для системы* (5) *выполнены условия* $\delta_1 = 0$, *и* $\exists\, \Omega \in R$ *такое что* $\forall\, |\omega| \geqslant \Omega$

$$||R_0^{-1}(i\omega)|| \leqslant \frac{1}{2||A||}, \tag{10}$$

то для того, чтобы данная возмущенная система сохраняла устойчивость необходимо, чтобы $\forall\, |\omega| < \Omega$ *выполнялось неравенство*

$$|sin\Big(\omega\frac{\tau-\tau_1}{2}\Big)| < \frac{1}{2||A||}.$$

Пример решения задачи

Рассмотрим пример решения конкретной задачи. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h = 1, \quad \tau = 1.5 \tag{11}$$

Выбрем так же

$$F = \begin{pmatrix} 8 & 8 \end{pmatrix}, \quad G = -1$$

благодаря чему собственные числа матрицы $A + BF$ будут соответственно

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

В данном случае из рисунков 1 и 2 следует

$$\max_{\omega \in R} ||R_0^{-1}(i\omega)|| < 835$$

$$||A|| = 7.2854$$

откуда, выбрав $m = 835$, получим

$$835 > \frac{1}{14.5708}.$$

Это означает, что условие первой теоремы не выполнено и нужно воспользоваться второй теоремой. На интервале $\omega \in [-39.4, 39.4]$

$$||R_0^{-1}(i\omega)|| \geqslant \frac{1}{2||A||},$$

а значит на нем должно выполнятся неравенство

$$|sin\Big(\frac{\omega}{2}[h - h_1]\Big)| < \frac{1}{2||A||}$$

отсюда, выбрав $\omega = 39.4$ следует оценка

$$|\delta_1| < 0.0035.$$

Аналогично можно получить оценку для δ_2

$$|\delta_2| < 0.0249.$$

Заключение

В данной работе найдены достаточные условия робастной стабилизации для класса дифференциальных уравнений с запаздываниями в управлении и состоянии. Полученные теоремы позволяют найти оценку допустимых отклонений для запаздываний в управлении и состоянии, сохраняющих устойчивость возмущенной системы.

В качестве направлений дальнейших исследований отметим распространение полученных результатов на случаи, когда возмущение присутствует как в управлении, так и в состоянии.

Список литературы

1. Bellman R., Cooke K. L. Differential Difference Equations. New York: Academic Press, 1963. P. 462

2. Kharitonov V. L., 2015. Prediction Based Control: Implementation Issue. Differential Equations and Control Processes, No 4. P. 52–65.

3. Manitius A. Z., Olbrot A. W. (1979). Finite spectrum assignment for systems with delay, IEEE Trans. on Automatic Control, 24, 541-553.

4. Mondie S., Michiels W.,2003. Finite spectrum assignment of unstable time-delay sytems with a safe implementation, IEEE Trans. on Automatic Control, No 12. P. 2207-2212.

5. Емельянов С. В., Коровин С. К., Ильин А. В., Фомичев В. В., Фурсов А. С. Математические методы теории управления. Проблемы устойчивости, управляемости и наблюдаемости. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 200 с.

Приложение

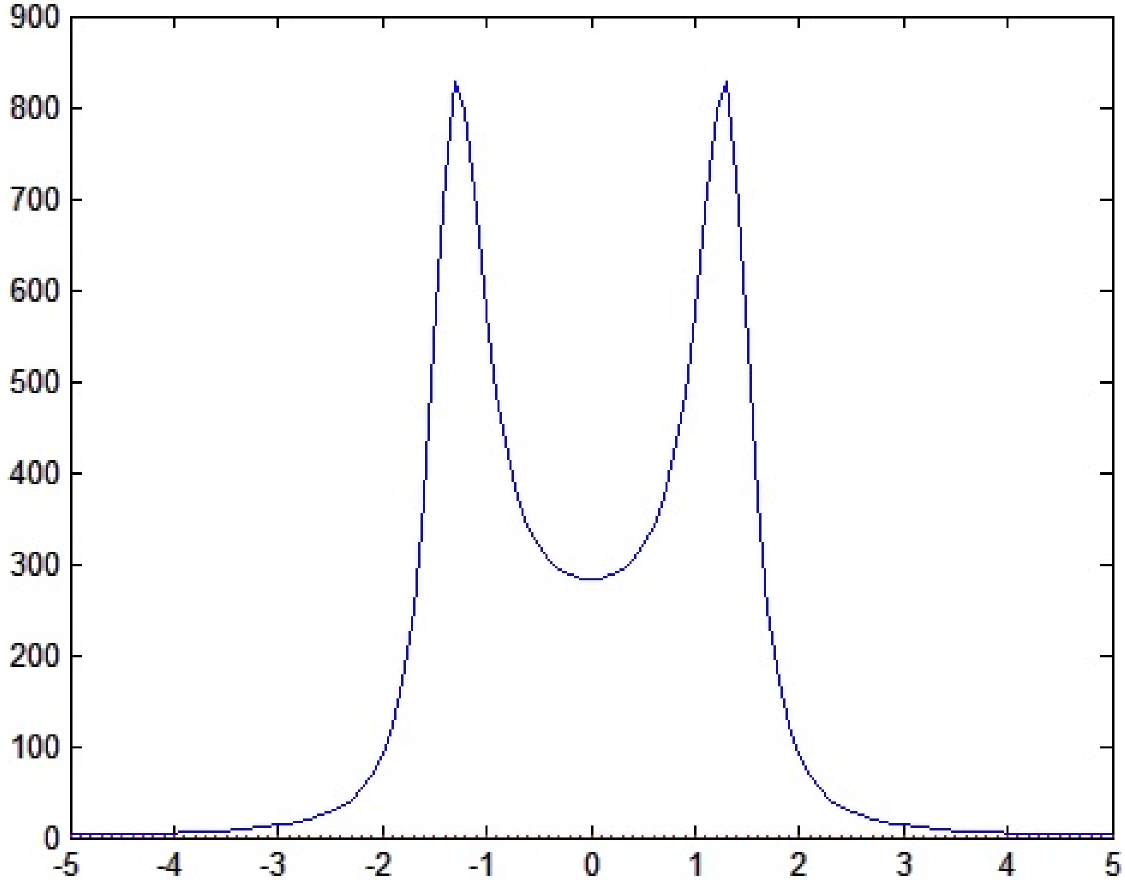

Рис. 1: График функции $f(\omega) = ||R_0^{-1}(i\omega)||$.

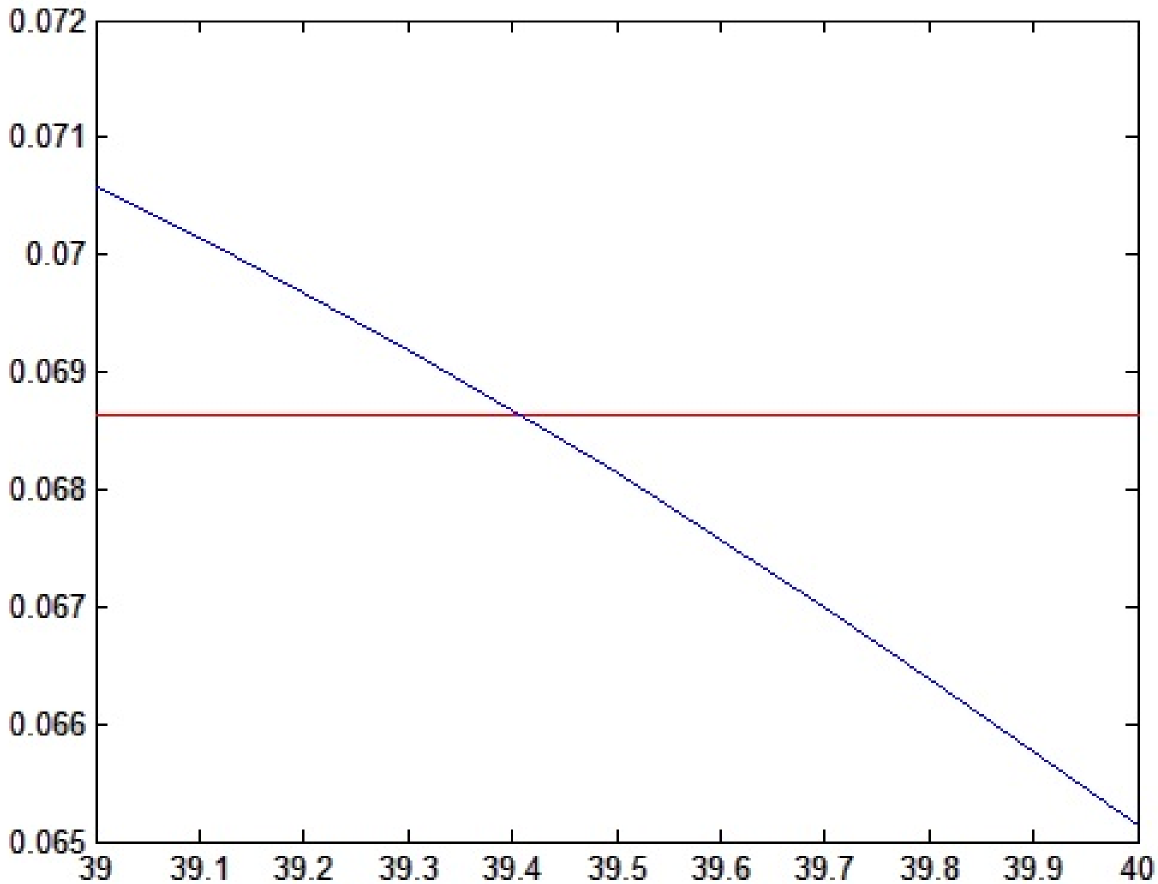

Рис. 2: Графики функций $f(\omega) = ||R_0^{-1}(i\omega)||$ (синий) и $g(\omega) = \frac{1}{2||A||}$ (красный).